Réduction des endomorphismes : Trigonalisation

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Trigonalisation

1.1 Définition

Définition 1

♡ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **trigonalisable** si et seulement si il existe une base B de E telle que la matrice de f dans la base B soit triangulaire.

Définition 2

♡ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite **trigonalisable** si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

A est donc trigonalisable si et seulement si A **est semblable à une matrice triangulaire**
si et seulement si il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

Remarque 1

- Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

  En effet, si $T = (t_{ij}) \in \mathcal{T}_n^i(\mathbb{K})$, en notant $P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1} = P$ et,

  $$PTP^{-1} = \begin{pmatrix} t_{n,n} & \dots & & t_{n,1} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{1,1} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$$

  Dans la suite, on choisira donc de s'intéresser aux matrices triangulaires supérieures.

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable, alors on sait qu'il existe une base telle que dans cette base **la matrice de f soit triangulaire, et les éléments diagonaux de la matrice triangulaire sont les valeurs propres de f écrites sur la diagonale autant de fois que l'indique leur ordre de multiplicité**.

  En effet, si f est trigonalisable, le polynôme caractéristique de f est facile à calculer dans la nouvelle base, il s'agit simplement du produit des termes diagonaux de la matrice de $\lambda Id - f$.

  Si on a $\chi_f(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ avec λ_1, λ_2, ..., λ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de f avec leur ordre de multiplicité respectif m_1, m_2, ..., m_p.

  Alors, il existe une base dans la matrice de A s'écrit

1.2 Une condition nécessaire et suffisante

Théorème 1

♡ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
- (i) A est trigonalisable.
- (ii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Nous avons le même théorème pour un endomorphisme en dimension finie.

Démonstration 1

$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii) :}}$ Supposons que A soit trigonalisable, alors A est semblable à une matrice T triangulaire $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \dots & & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$. Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = \chi_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - t_{ii})$, donc, χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i) :}}$ On fait une preuve par récurrence sur n.

- Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est trigonalisable.
- $\mathcal{P}_1$ est vraie ! Il n'y a rien à démontrer.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
  Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$.
  Alors, A possède au moins une valeur propre λ_1 et un vecteur propre associé v_1, et donc, il existe $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A soit semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0_{n,1} & A_2 \end{pmatrix}$.
  On a alors $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & -L \\ 0_{n,1} & \lambda I - A_2 \end{pmatrix} = (\lambda - \lambda_1).\chi_{A_2}(\lambda)$.
  Donc, χ_{A_2} est scindé sur $\mathbb{K}$.
  D'après $\mathcal{P}_n$, il existe $P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T_2 \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$ telles que $A_2 = P_2 T_2 P_2^{-1}$.
  Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.
  P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P_2^{-1} \end{pmatrix}$.
  Montrons qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telle qu'en notant $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0_{n,1} & T_2 \end{pmatrix}$, on ait $\begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0_{n,1} & A_2 \end{pmatrix} = PTP^{-1}$.
  Pour avoir ceci, il faut et il suffit que $T = P^{-1}. \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0_{n,1} & A_2 \end{pmatrix} .P$.
  Calculons donc :
  $P^{-1}. \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0_{n,1} & A_2 \end{pmatrix} .P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P_2^{-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0_{n,1} & A_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P_2 \end{pmatrix} = \dots$
  $= \qquad\qquad = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0_{n,1} & T_2 \end{pmatrix}$
  Pour obtenir ceci, il suffit de prendre $X =$
  Ainsi, A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & LP_2 \\ 0_{n,1} & T_2 \end{pmatrix}$ avec T_2 matrice triangulaire supérieure, A est donc semblable à une matrice triangulaire. $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.
- En conclusion, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 1 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Tout endomorphisme de E est trigonalisable.
De même, toute matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration 2

Exemple 1 Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Polynômes annulateurs

2.1 Théorème de Cayley Hamilton

Théorème 2

Cayley Hamilton ♡
Pour tout endomorphisme f de E où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, **le polynôme caractéristique de f annule f** ie $\chi_f(f) = 0$.

Démonstration 3 Soit x appartenant à E et on va montrer que $\chi_f(f)(x) = 0_E$.
Si ceci est pour tout x de E, on obtiendra ainsi $\chi_f(f) = 0$.
Pour $x = 0_E$, c'est évident par linéarité.

Pour $x \neq 0_E$, alors $\{x\}$ est libre, et la famille $\{x, f(x), ..., f^n(x)\}$ ayant $n+1$ éléments est liée.

Il existe donc un plus grand entier p_x tel que $\{x, f(x), ..., f^{p_x-1}(x)\}$ soit libre.
Comme $\{x, f(x), ..., f^{p_x}(x)\}$ est liée, il existe $(a_0, a_1, ..., a_{p_x-1})$ tel que

$$f^{p_x}(x) = \sum_{k=0}^{p_x-1} a_k f^k(x)$$

On complète ensuite la famille libre $\{x, f(x), ..., f^{p_x-1}(x)\}$ en une base B de E dans laquelle la matrice s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & * \\ & \ddots & 0 & a_{p_x-2} & * \\ & & 1 & a_{p_x-1} & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M \end{pmatrix}$$

où M est une matrice carrée.
Ainsi, $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} C & * \\ 0_{1,p_x} & M \end{pmatrix}$
La matrice C est notée ainsi, car on l'appelle parfois matrice compagnon.
Alors, $\chi_f = \chi_C{\cdot}\chi_M = \chi_M{\cdot}\chi_C$.

Or, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & & & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & -a_{p_x-2} \\ & & -1 & \lambda - a_{p_x-1} \end{vmatrix}$.

Calculons ce déterminant en remplaçant la ligne L_1 par $L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + ... + \lambda^{p_x-1} L_{p_x}$.
Cette opération permet d'obtenir le déterminant suivant :

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & & & \lambda^{p_x} - a_{p_x-1}\lambda^{p_x-1} - ... - a_1\lambda - a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & -a_{p_x-2} \\ & & -1 & \lambda - a_{p_x-1} \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant selon sa première ligne et on obtient :

$$\chi_C(\lambda) = (-1)^{p_x+1}.\left(\lambda^{p_x} - a_{p_x-1}\lambda^{p_x-1} - ... - a_1\lambda - a_0\right) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

où le déterminant est celui d'une matrice de format $(p_x - 1) \times (p_x - 1)$.
D'où, $\chi_C(\lambda) = (-1)^{p_x+1}.\left(\lambda^{p_x} - a_{p_x-1}\lambda^{p_x-1} - ... - a_1\lambda - a_0\right).(-1)^{p_x-1} = \lambda^{p_x} - a_{p_x-1}\lambda^{p_x-1} - ... - a_1\lambda - a_0$.
Si on pose $P = X^{p_x} - a_{p_x-1}X^{p_x-1} - ... - a_1X - a_0$, on remarque que $P(f)(x) = 0_E$.

Ainsi, $\chi_f(f)(x) = \chi_M \circ \chi_C(f)(x) = \chi_M\left(P(f)(x)\right) = \chi_M(0_E) = 0_E$.

Ce raisonnement est valable pour tout x de E, en conclusion $\chi_f() = 0$.

2.2 Théorème de décomposition des noyaux

Commençons par une définition et une première proposition sur les polynômes :

Définition 3

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si leur PGCD est égal à 1.

Proposition 1 Théorème de Bezout

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les polynômes P_1, ..., P_n de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux (dans leur ensemble) si et seulement s'il existe des polynômes A_1, ..., A_n de $\mathbb{K}[X]$, tels que

$$1 = A_1P_1 + ... + A_nP_n$$

Admis

Théorème 3

♡ **Théorème de décomposition des noyaux**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, P_1, P_2, ..., P_n n éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux.

Alors, les sous-espaces vectoriels $\ker(P_i(f))$ sont en somme directe et

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \ker\left(P_i(f)\right) = \ker\left(\prod_{i=1}^{n} \left(P_i\right)(f)\right)$$

Démonstration 4 Notons $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P_i$ et $Q_i = \displaystyle\prod_{1 \leq j \leq n,\, j \neq i} P_j$.

Ainsi, pour tout $i \in \{1, ...n\}$, $P = P_iQ_i$.

On montre successivement que :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ker\left(P_i(f)\right) \subset \ker(P(f))$.
2. $\ker(P(f)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ker\left(P_i(f)\right)$.
3. La décomposition de 0_E comme somme d'éléments des $\ker(P_i(f))$ est unique.

1. Nous avons pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,

   Donc, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ker\left(P_i(f)\right) \subset \ker(P(f))$.
2. Montrons en premier lieu que les polynômes Q_1, Q_2, ..., Q_n sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Ainsi, $\ker(P(f)) = \sum_{i=1}^{n} \ker\left(P_i(f)\right)$.

3. Soit x_1, ..., x_n des éléments de E tels que $x_1 + ... + x_n = 0_E$ et pour tout $i \in \{1, ...n\}$, $x_i \in \ker(P_i(f))$. Montrons qu'alors tous les x_i sont nuls, ceci montrera que la somme des $\ker(P_i(f))$ est directe.

Corollaire 2 Réduction à une forme diagonale par blocs Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1, $f \in \mathcal{L}(E)$, P_1, ..., P_N des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{N} P_i$$

avec P_1, ..., P_N deux à deux premiers entre eux.

Notons pour $i \in \{1, ..., N\}$, $n_i = \dim\left(\ker(P_i(f))\right)$.

Il existe une base B de E et des matrices $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ pour $i \in \{1, ..., N\}$ telles que

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_N \end{pmatrix}$$

Démonstration 5 On sait que $\chi_f(f) = 0$, donc, $E = \ker\left(\chi_f(f)\right) = \bigoplus_{i=1}^{N} \ker(P_i(f))$.

$\ker(P_i(f))$ admet une base B_i, si on note $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, B est une base de E.

Etant donné que $\ker(P_i(f))$ est stable par f, la matrice obtenue est bien diagonale par blocs.

Exemple 2 Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

est semblable à une matrice diagonale par blocs A' que l'on explicitera et donner la matrice P telle que $A' = P^{-1}AP$.

2.3 Polynôme minimal

Proposition 2 Proposition-Définition ♡
Si l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\}$ est non réduit à 0, il existe un polynôme unitaire unique, noté π_f tel que

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\} = \pi_f \mathbb{K}[X] = \{\pi_f.P \,/\, P \in \mathbb{K}[X]\}$$

π_f est appelé **le polynôme minimal de** f.

On définit de même la notion de polynôme minimal pour une matrice A.
Démonstration 6
Existence :
On a supposé que $\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\}$ est non réduit à 0_E, parmi tous les polynômes annulateurs de f prenons en un non nul de degré minimal que l'on note P_0, alors si on note a le coefficient dominant de P_0, $\frac{1}{a}P_0$ est aussi polynôme annulateur de f et il est unitaire. Notons le π_f.
Prenons P un autre polynôme annulateur de f, et effectuons la division euclidienne de P par π_f, $\exists!(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $P = \pi_f.Q + R = Q.\pi_f + R$ avec $\deg(R) < \deg(\pi_f)$.
Comme π_f et P sont des polynômes annulateurs de f, R serait également un polynôme annulateur de f, et il serait de degré inférieur strict à celui de π_f, si R est non nul, ceci contredit la définition de π_f. En conclusion, $R = 0$.
Il existe donc un polynôme annulateur de f π_f unitaire tel que $\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\} = \pi_f \mathbb{K}[X]$.

Unicité :
Supposons qu'il existe deux polynômes annulateurs unitaires de f : π_f et Q_0 tels que $\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\} = \pi_f \mathbb{K}[X] = Q_0 \mathbb{K}[X]$.
Alors, $\deg(\pi_f - Q_0) < \deg(\pi_f)$ et $\pi_f - Q_0$ est un polynôme annulateur de f, donc, $\pi_f - Q_0$ est un multiple de π_f, ce qui n'est possible que si $\pi_f - Q_0$ est le polynôme nul, c'est à dire que $\pi_f = Q_0$.

Proposition 3 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f admet un polynôme minimal.

Démonstration 7 Comme nous sommes en dimension finie, nous avons déjà montré qu'il existe un polynôme annulateur de f non nul.

Remarque 2 ♡
D'après le théorème de Cayley Hamilton, $\chi_f(f) = 0$, donc π_f divise χ_f et $1 \leq \deg(\pi_f) \leq n$.

Théorème 4

> ♡ Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$.
>
> Pour que f soit diagonalisable, il faut et il suffit que π_f **soit scindé avec toutes ses racines simples**.

Démonstration 8
$\boxed{\Rightarrow :}$ Supposons f diagonalisable, d'après le théorème 2 du chapitre Réduction des endomorphismes - Diagonalisation, il existe un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ scindé n'ayant que des racines simples tel que $P(f) = 0$, comme $\pi_f | P$, π_f est scindé et n'a que des racines simples.

$\boxed{\Leftarrow :}$ Réciproquement, supposons que π_f soit scindé et n'ait que des racines simples.

Comme $\pi_f(f) = 0$, d'après le théorème 2 du chapitre Réduction des endomorphismes - Diagonalisation, f est diagonalisable.

Proposition 4 Pour tout polynôme irréductible P de $\mathbb{K}[X]$, on a $P | \pi_f \Leftrightarrow P | \chi_f$.

Autrement dit : ♡ π_f **et** χ_f **ont les mêmes diviseurs irréductibles**.

Démonstration 9 Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\boxed{\Rightarrow :}$

$\boxed{\Leftarrow :}$ Réciproquement, soit P un diviseur irréductible de χ_f, il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

Corollaire 3 ♡ **Les valeurs propres de f sont les racines de π_f.**

Démonstration 10

Corollaire 4 ♡ Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour que f soit trigonalisable, il faut et il suffit que π_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.

Démonstration 11

3 Réduction de Jordan

3.1 Sous-espaces caractéristiques

Définition 4

♡ Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(f)$, μ_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 dans π_f.
On appelle **sous espace caractéristique** (ou sous espace spectral) de f associé à la valeur propre λ_0, et on note $\mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$ le sous espace vectoriel de E défini par

$$\mathrm{SEC}(f, \lambda_0) = \ker(f - \lambda_0 Id)^{\mu_0}$$

Remarque 3 Pour toute valeur propre λ_0 de f, $\{0_E\} \neq \mathrm{SEP}(f, \lambda_0) \subset \mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$.

Proposition 5 ♡ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \mathrm{SEC}(f, \lambda)$$

Démonstration 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.
On a alors, $\pi_f = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\mu_k}$.
Ainsi,

Proposition 6 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$, $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, ω_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 dans χ_f, μ_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 dans π_f.

1. $\mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$ est stable par f, et en notant $e_0 = Id|_{\mathrm{SEC}(f,\lambda_0)}$ et f_0 l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$, $f_0 - \lambda_0 e_0$ est nilpotent d'indice μ_0.
2. $\dim(\mathrm{SEC}(f, \lambda_0)) = \omega_0$.
3. En notant $\forall q \in \mathbb{N}$, $N_q = \ker(f - \lambda_0 Id)^q$, on a :

$$\{0_E\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_{\mu_0} = N_{\mu_0+1} = \ldots = \mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$$

Démonstration 13

1. – $\mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$ est stable par f car $\forall x \in \mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$, $(f - \lambda_0 Id)^{\mu_0}(f(x)) = f((f - \lambda_0 Id)^{\mu_0}(x)) = f(0) = 0$, donc, $f(x) \in \mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$.
   – Comme $\forall x \in \mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$, $(f - \lambda_0 Id)^{\mu_0}(x) = 0$, on a $(f_0 - \lambda_0 e_0)^{\mu_0} = 0$, donc, $f_0 - \mu_0 e_0$ est nilpotent.
2. – Par définition de μ_0, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_f = (X - \lambda_0)^{\mu_0} Q$ et $Q(\lambda_0) \neq 0$.
   Puisque $(X - \lambda_0)^{\mu_0} \wedge Q = 1$, d'après le théorème des noyaux :

$$E = \ker(\pi_f(f)) = \ker(f - \lambda_0 Id)^{\mu_0} \oplus \ker(Q(f)) = \mathrm{SEC}(f, \lambda_0) \oplus \ker(Q(f))$$

   Il est clair que $\ker(Q(f))$ est stable par stable par f.
   Notons g l'endomorphisme induit par f sur $\ker(Q(f))$.
   On a $\chi_f = \chi_{f_0} \cdot \chi_g$.
   – Puisque $f_0 - \lambda_0 Id$ est nilpotente, en notant $\delta_0 = \dim \mathrm{SEC}(f, \lambda_0)$, on a $\chi_{f_0} = (X - \lambda_0)^{\delta_0}$.
   – D'autre part, puisque $\forall x \in \ker(Q(f))$, $Q(g)(x) = Q(f)(x) = 0$, Q est un polynôme annulateur de g, et comme $Q(\lambda_0) \neq 0$, λ_0 n'est pas valeur propre de g.
   Ainsi, les ordres de multiplicité de λ_0 dans χ_f et dans χ_{f_0} sont égaux, d'où $\delta_0 = \omega_0$.
3. Admis

3.2 Réduction des endomorphismes nilpotents

Notons pour $r \in \mathbb{N}^*$, $J_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, cette matrice est appelée **matrice nilpotente de Jordan d'ordre r.**

Ainsi, $J_1 = (0)$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ...

Soit v un endomorphisme nilpotent d'ordre N.

Alors, il existe une base dans laquelle la matrice J de v est diagonale par blocs et vaut :

$$J = \begin{pmatrix} J_N & 0 & & & & \dots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & \\ & & J_N & & & & & & & \\ & & & J_{N-1} & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & J_{N-1} & & & \\ & & & & & & & J_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & \dots & & & & J_1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est appelée **réduite de Jordan de l'endomorphisme nilpotent** v.

Les méthodes qui suivent proviennent d'une théorie que nous ne ferons pas du fait de sa complexité, elles ont l'inconvénient de ne pas permettre de répondre à la question dans toutes les situations, mais elles nous serons suffisantes pour les cas simples que vous serez amenés à rencontrer.

Méthode pour réduire une matrice nilpotente :

Première méthode :

1. Trouver l'indice de nilpotence N de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire l'entier naturel N tel que $A^N = 0$ et $A^{N-1} \neq 0$. Alors, si on note v l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, on a $\ker(v^N) = E$.
2. Chercher alors des vecteurs indépendants n'appartenant pas à $\ker(v^{N-1})$, on en prendra $n - \dim(\ker(v^{N-1}))$.
3. Pour chaque vecteur u_1 trouvé, on détermine $u_2 = v(u_1)$, $u_3 = v(u_2)$, ... jusqu'à ce que l'on ne trouve plus de vecteurs.
4. On prend pour nouvelle base $(u_1, v(u_1), v^2(u_1), ..., u_1', v(u_1'), v^2(u_1'), ...)$, dans cette nouvelle base - nous admettrons ici qu'il s'agit bien d'une base-, la matrice est la réduite de Jordan de A.

Autre façon de faire :

1. Déterminer une base de vecteur propres de A (ils sont associés à la valeur propre 0).
2. S'il n'y en a pas suffisamment pour constituer une base de E, c'est à dire si la matrice n'est pas diagonalisable, déterminer des vecteurs pseudo-propres, c'est à dire que pour chaque vecteur propre Y_1 de A, on résout l'équation $AX = Y_1$, on prend un vecteur Y_2 solution, puis $AX = Y_2$ ...

   On fait ceci jusqu'à ce que l'on ait suffisamment de vecteurs, ou que l'on ne puisse plus en trouver de nouveaux.
3. Une fois cette recherche terminée, on choisit donc pour base - nous admettrons ici qu'il s'agit bien d'une base- la famille obtenue en partant des derniers vecteurs obtenus, et en formant des "chaînes de vecteurs", ... $v^2(u), v(u), u$, ... jusqu'à 0 exclu, puisqu'il existe k tel que $v^k(u) = 0$.

Exemple 3 Vérifier que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente et déterminer sa réduite de Jordan.

3.3 Théorème de réduction de Jordan

Théorème 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$, soit $\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ le spectre de f, et pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, μ_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans π_f.

A l'ordre près des blocs de Jordan, il existe une réduite de Jordan et une seule pour f :

$$J = \mathrm{diag}(J_{\mu_1}(\lambda_1), ..., J_{\mu_1}(\lambda_1), ..., J_1(\lambda_1), ..., J_1(\lambda_1), ..., J_{\mu_p}(\lambda_p), ..., J_{\mu_p}(\lambda_p), ..., J_1(\lambda_p), ..., J_1(\lambda_p))$$

où pour tout $(k, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{K}$, $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$

Admis

Méthode :

1. On détermine le polynôme caractéristique que l'on factorise.
2. On sait alors que $E = \ker(\pi_f(f)) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(f - \lambda_i Id)^{\mu_i}$.

   Or $f - \lambda_i Id|_{\ker(f-\lambda_i Id)^{\mu_i}} = f - \lambda_i Id|_{\mathrm{SEC(f,\lambda_i)}}$ est un endomorphisme nilpotent.

   On applique alors la méthode de réduction des endomorphismes nilpotents vue précédemment...

Exemple 4 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$.
Alors, A est trigonalisable et,

A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans ce cas A est diagonalisable, ou alors,

A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple 5 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Déterminer le polynôme caractéristique χ_A puis la réduite de Jordan de A.